

# Aplikasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Implisit untuk Menentukan Kasus Adveksi-Difusi 2D pada Sebaran Polutan Di Suatu Perairan

Holand Sampera<sup>a</sup>, Apriansyah<sup>b\*</sup>

<sup>a</sup>Program Studi Fisika Jurusan Fisika, FMIPA Universitas Tanjungpura

<sup>b</sup>Program Studi Ilmu Kelautan Jurusan Ilmu Kelautan, FMIPA Universitas Tanjungpura

Jalan Prof. Dr. H. Hadari Nawawi, Pontianak, Indonesia

\*Email : [apriansyahhakim@yahoo.com](mailto:apriansyahhakim@yahoo.com)

## Abstrak

Telah ditentukan pola sebaran konsentrasi polutan pada sungai sintetis dan Sungai Kapuas menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson Implisit. Metode ini digunakan untuk menyelesaikan kasus adveksi-difusi 2D pada sebaran konsentrasi polutan dan membandingkannya dengan metode analitik. Pada sungai sintetis, RMSE yang didapat untuk kasus adveksi-difusi 2D proses sesaat adalah sebesar  $8,19 \times 10^{-4}$  dan 0,11 untuk proses kontinu. Simulasi pola sebaran konsentrasi pada Sungai Kapuas menunjukkan sebaran yang lebih jauh untuk nilai koefisien difusi yang kecil pada saat surut dibandingkan dengan saat pasang.

**Kata Kunci :** *Persamaan Adveksi-Difusi, Crank-Nicholson, Sungai Kapuas*

## 1. Latar Belakang

Penyebaran polutan di suatu perairan merupakan permasalahan yang sering dijumpai di kalangan masyarakat. Sorotan ini mengemuka karena besarnya nilai konsentrasi suatu polutan yang terlarut. Berdasarkan kejadian ini diperlukan kajian khusus penyebaran polutan pada suatu badan air baik itu melalui pengukuran langsung maupun menggunakan pemodelan dengan perangkat komputer. Dari sisi ekonomis dan kepraktisan, penggunaan pemodelan komputer dapat dijadikan skala prioritas mengingat akurasi yang didapat memungkinkan keadaan fisis di alam dapat dihampiri dengan baik.

Metode beda hingga merupakan salah satu metode yang dapat diterapkan untuk kasus fenomena transpor di perairan dangkal dan aliran air tanah. Metode ini biasanya dinyatakan dengan persamaan adveksi difusi karena metode ini dapat memberikan hasil pendekatan yang cukup akurat [1]. Penelitian tentang penyelesaian persamaan adveksi difusi 2 dimensi untuk model sebaran polutan pernah dilakukan oleh Alman menggunakan metode beda hingga Dufort-Frankle dengan asumsi koefisien difusi dan kecepatan aliran yang konstan. Dalam penelitiannya Alman menjelaskan bahwa metode beda hingga yang digunakan (Metode Beda Hingga Dufort-Frankle) dapat dipakai untuk menyelesaikan persoalan angkutan polutan dalam aliran air yang mengalir dalam aliran terbuka. Persamaan tersebut digambarkan dalam sebuah persamaan differensial parsial yang disebut sebagai persamaan adveksi-difusi 2D [2]. Selain itu, berdasarkan metode analitik yang dilakukan

oleh Aminuddin [3] menjelaskan bahwa simulasi model analitik 2D cocok untuk sumber polutan sesaat maupun kontinu sehingga menunjukkan hasil yang sesuai dengan yang diharapkan.

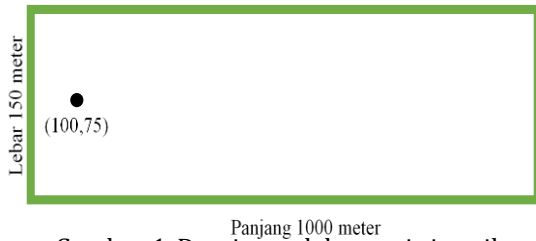
Hal di atas mendasari penelitian untuk menyelesaikan persamaan adveksi-difusi, serta memodelkan sebaran konsentrasi dari persamaan tersebut. Pemodelan menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dapat menjadi informasi awal bagi kalangan akademisi tentang pola sebaran konsentrasi di suatu perairan. Selain itu, juga dapat menjadi referensi ilmiah terkait studi awal penyelesaian numerik dari persamaan adveksi-difusi.

## 2. Metodologi

### 2.1 Desain Model

Desain model pada penelitian ini terdiri dari dua desain yaitu desain sungai sintetis dan desain Sungai Kapuas. Pada sungai sintetis diasumsikan berbentuk persegi panjang tanpa memperhatikan kedalaman sungai sehingga kedalaman sungai dianggap seragam. Desain tersebut merupakan sebuah bidang datar horizontal dengan lebar dan panjang masing-masing adalah 150 meter dan 1000 meter serta titik sumber konsentrasi yang diinjeksikan berada pada titik  $x_0=100$  meter dan  $y_0=75$  meter seperti pada Gambar 1. Kasus adveksi-difusi yang dikaji memiliki dua proses yaitu untuk sumber sesaat dan sumber kontinu dengan nilai konsentrasi awal 10 ppm. Untuk proses sesaat diberikan nilai kecepatan aliran sebesar 0,01 m/s dan 0,05 m/s dan koefisien difusi sebesar 0,1 m<sup>2</sup>/detik dan 0,5 m<sup>2</sup>/detik. Kemudian untuk proses kontinu kecepatan alirannya sebesar 0,5

dan 1 m/s serta nilai difusivitas 0,5 dan 1 m<sup>2</sup>/detik.



Gambar 1. Desain model sungai sintetik



Gambar 2. Desain model Sungai Kapuas [4]

Pada Gambar 2 di atas merupakan desain model Sungai Kapuas dengan lebar dan panjang domain sungai adalah 100 meter dan 500 meter dengan sumber konsentrasi kontinu terletak di tepian sungai.

## 2.2 Penyelesaian Masalah dengan Solusi Analitik

Persamaan (1) di bawah ini merupakan persamaan adveksi-difusi 2D yang akan diselesaikan untuk mencari solusi analitiknya [3].

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

Dari persamaan (1) didapatkan solusi analitiknya sebagai berikut:

$$C(x, y, t) = \frac{B}{\sqrt{4\pi D_x t} \sqrt{4\pi D_y t}} e^{-\frac{(x-ut)^2}{4D_x t}} e^{-\frac{(y-vt)^2}{4D_y t}} \quad (2)$$

Kemudian untuk syarat awal dan syarat batas dari solusi analitik di atas adalah sebagai berikut:

Syarat awal:  $C(x, y, 0) = 0$

dan syarat batas:  $C(x, y, \infty) = 0$

Dimana B merupakan massa yang dirata-ratakan terhadap kedalaman (M/h) sehingga diperoleh:

$$C(x, y, t) = \frac{M/h}{\sqrt{4\pi D_x t} \sqrt{4\pi D_y t}} e^{-\frac{(x-ut)^2}{4D_x t}} e^{-\frac{(y-vt)^2}{4D_y t}} \quad (3)$$

Solusi di atas tidak dapat didefinisikan pada waktu  $t=0$  detik dan koefisien difusi  $D=0$  m<sup>2</sup>/detik, sehingga memerlukan modifikasi agar terdefinisi dalam keadaan  $t=0$  detik dan  $D=0$  m<sup>2</sup>/detik. Hal ini dapat diatasi dengan cara menambahkan konstanta  $s^2$  pada solusi di atas.

Dengan menambahkan  $s^2 = \frac{1}{\pi}$ , agar solusi

terdefinisi pada  $t=0$  s,  $u=v=0$  m/s dan  $D_x=D_y=0$  m<sup>2</sup>/s. Sehingga diperoleh:

$$C(x, y, t) = \frac{M/h}{\sqrt{\pi(s^2 + 4D_x t)} \sqrt{\pi(s^2 + 4D_y t)}} e^{-\frac{(x-x_0-ut)^2}{s^2 + 4D_x t}} e^{-\frac{(y-y_0-vt)^2}{s^2 + 4D_y t}} \quad (4)$$

Jika nilai awal  $C(x, y, 0) = C_0$ , maka diperoleh:

$M = C_0 \times h$ , maka persamaan (4) akan menjadi sebagai berikut:

$$C(x, y, t) = \frac{C_0}{\sqrt{\pi(s^2 + 4D_x t)} \sqrt{\pi(s^2 + 4D_y t)}} e^{-\frac{(x-x_0-ut)^2}{s^2 + 4D_x t}} e^{-\frac{(y-y_0-vt)^2}{s^2 + 4D_y t}} \quad (5)$$

Solusi analitik untuk proses kontinu adalah sebagai berikut:

$$C(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_0}{\sqrt{\pi(s^2 + 4D_x n\Delta t)} \sqrt{\pi(s^2 + 4D_y n\Delta t)}} e^{-\frac{(x-x_0-un\Delta t)^2}{s^2 + 4D_x n\Delta t}} e^{-\frac{(y-y_0-vn\Delta t)^2}{s^2 + 4D_y n\Delta t}} \quad (6)$$

dengan:

$C$  = Konsentrasi (ppm)

$C_0$  = Konsentrasi awal (ppm)

$x_0, y_0$  = Titik sumber

$u, v$  = Kecepatan (m/s)

$D_x, D_y$  = Koefisien difusi (m<sup>2</sup>/detik)

$M$  = Massa (kg)

$h$  = Kedalaman (m)

$t$  = Waktu (s)

$n$  = Jumlah interval waktu

### 2.3 Penyelesaian Masalah dengan Metode Crank-Nicholson

Metode Crank-Nicholson merupakan metode beda hingga yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan panas dan persamaan diferensial parsial yang sejenisnya [5]. Penyelesaian masalah dengan metode beda hingga Crank-Nicholson ini yaitu dengan mendiskritisasi persamaan adveksi-difusi 2D menggunakan skema Crank-Nicholson untuk memodelkan sebaran polutan di sungai sintetis dan sungai kapuas.

Langkah sumbu x

$$\frac{C_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - C_{i,j}^n}{\frac{\Delta t}{2}} = -\frac{u}{2} \left( \frac{C_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - C_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} + \frac{C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{Dx}{2} \left( \frac{C_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2C_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + \frac{C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{u\Delta t}{8\Delta x} + \frac{Dx\Delta t}{4\Delta x^2} \right) C_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left( 1 + 2\frac{Dx\Delta t}{4\Delta x^2} \right) C_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ & + \left( \frac{u\Delta t}{8\Delta x} - \frac{Dx\Delta t}{4\Delta x^2} \right) C_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \left( \frac{u\Delta t}{8\Delta x} + \frac{Dx\Delta t}{4\Delta x^2} \right) C_{i-1,j}^n \\ & + \left( 1 - 2\frac{Dx\Delta t}{4\Delta x^2} \right) C_{i,j}^n + \left( -\frac{u\Delta t}{8\Delta x} + \frac{Dx\Delta t}{4\Delta x^2} \right) C_{i+1,j}^n \end{aligned} \quad (8)$$

Langkah sumbu y

$$\frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} = -\frac{v}{2} \left( \frac{C_{i,j+1}^{n+1} - C_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} + \frac{C_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - C_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta y} \right) + \frac{Dy}{2} \left( \frac{C_{i,j+1}^{n+1} - 2C_{i,j}^{n+1} + C_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + \frac{C_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2C_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \right) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{v\Delta t}{8\Delta y} + \frac{Dy\Delta t}{4\Delta y^2} \right) C_{i,j-1}^{n+1} + \left( 1 + 2\frac{Dy\Delta t}{4\Delta y^2} \right) C_{i,j}^{n+1} \\ & + \left( \frac{v\Delta t}{8\Delta y} - \frac{Dy\Delta t}{4\Delta y^2} \right) C_{i,j+1}^{n+1} = \left( \frac{v\Delta t}{8\Delta y} + \frac{Dy\Delta t}{4\Delta y^2} \right) C_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} \\ & + \left( 1 - 2\frac{Dy\Delta t}{4\Delta y^2} \right) C_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left( -\frac{v\Delta t}{8\Delta y} + \frac{Dy\Delta t}{4\Delta y^2} \right) C_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

### 2.4 Analisis Hasil

Analisis hasil dilakukan untuk melihat perbedaan hasil dari metode yang digunakan yaitu antara metode numerik Crank-Nicholson dan metode analitik, karena metode analitik merupakan solusi eksak yang umum digunakan dalam penerapan kasus di kehidupan nyata walaupun masih ada kesalahan yang didapatkan dari metode analitik ini.

Hasil yang baik dari metode yang digunakan dinyatakan dalam error atau tingkat kesalahan dari sebuah metode. Tingkat kesalahan atau error didapatkan dengan menghitung *Root Mean Square Error* (RMSE) dari hasil metode Crank-Nicholson dan metode analitik seperti persamaan (11), sehingga dengan error yang didapatkan akan terlihat baik atau buruknya penggunaan metode pada kasus yang ditinjau. Nilai RMSE didapatkan dari persamaan berikut [6]:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (e_i - \hat{e}_i)^2} \quad (11)$$

dengan:

$e_i$  = nilai eksak (analitik)

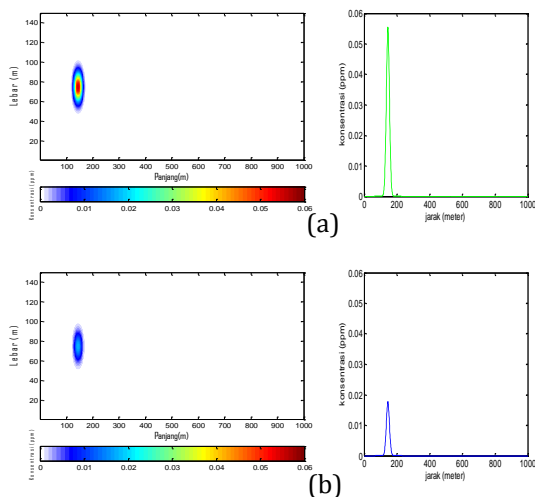
$\hat{e}_i$  = nilai hampiran/prediksi

### 3. Hasil dan Pembahasan

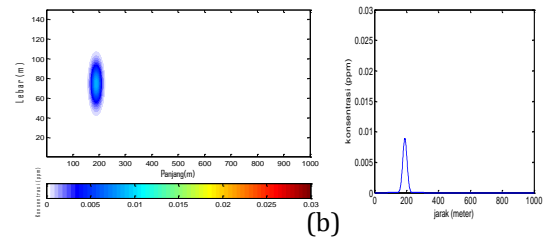
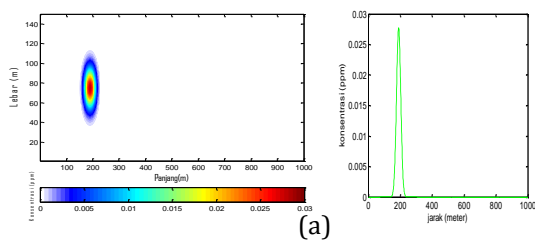
Pola sebaran konsentrasi polutan untuk kasus adveksi-difusi pada sungai sintetis memiliki dua proses yaitu sumber sesaat dan sumber kontinu. Setiap proses memiliki waktu simulasi yang berbeda yaitu  $t=900$  detik dan  $t=1800$  detik untuk proses sesaat, sedangkan untuk proses kontinu, waktu yang digunakan adalah selama  $t=300$  detik dan  $t=600$  detik. Penerapan dari variasi waktu ini untuk melihat pengaruh waktu terhadap pola sebaran konsentrasi. Selain itu variasi dari nilai koefisien difusi dan kecepatan aliran juga dilakukan untuk melihat pengaruh dari nilai yang diberikan.

Proses adveksi-difusi 2D sesaat melibatkan nilai-nilai kecepatan dan koefisien difusi,

dimana untuk nilai-nilai yang kecil pola sebarannya tidak terlalu luas dan sedikit menyebar serta perpindahannya tidak terlalu jauh sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 3. Kemudian untuk Gambar 4, jika waktu yang digunakan lebih besar maka pola sebaran konsentrasinya lebih luas dan menyebar jika dibandingkan dengan waktu yang lebih kecil. Selain pola sebaran, dari kedua gambar tersebut juga menunjukkan kurva konsentrasi terhadap jarak untuk kedua model yang digunakan. Sebagaimana yang telah ditampilkan pada Gambar 4 untuk waktu simulasi 1800 detik konsentrasinya jauh lebih kecil jika dibandingkan dengan waktu 900 detik baik untuk model analitik maupun model Crank-Nicholsonnya. Akan tetapi pada gambar tersebut menunjukkan bahwa nilai konsentrasi untuk model Crank-Nicholsonnya selalu lebih kecil dari konsentrasi model analitik baik untuk waktu yang lebih lama maupun untuk waktu yang lebih cepat.

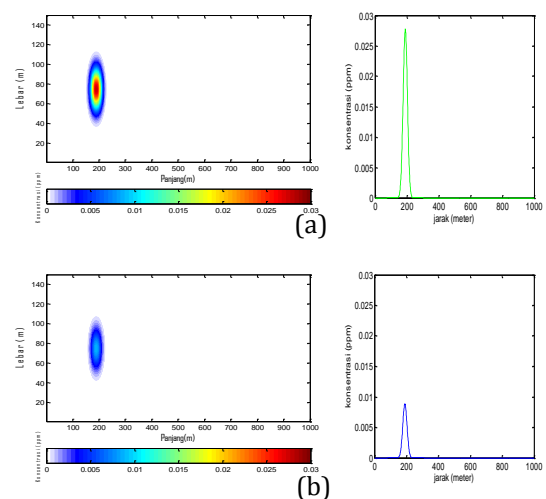


Gambar 3. Pola sebaran proses sesaat untuk  $u=0,05$  m/s,  $D=0,05$  m<sup>2</sup>/s dan  $t=900$  detik dan kurva konsentrasi terhadap jarak (a) model analitik (b) model Crank-Nicholson

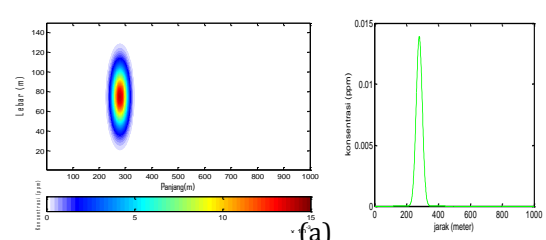
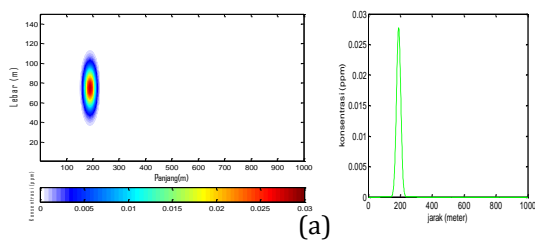


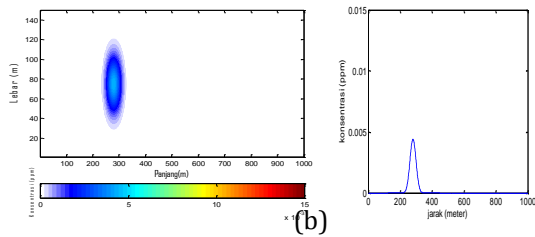
Gambar 4. Pola sebaran proses sesaat untuk  $u=0,05$  m/s,  $D=0,05$  m<sup>2</sup>/s dan  $t=1800$  detik dan kurva konsentrasi terhadap jarak (a) model analitik (b) model Crank-Nicholson

Pada Gambar 6 untuk waktu yang lebih lama memiliki pola sebaran yang semakin luas dan semakin jauh pergeserannya jika dibandingkan dengan waktu yang lebih kecil seperti Gambar 5. Selain itu untuk kurva konsentrasinya mengalami penurunan seiring bertambahnya waktu simulasi.



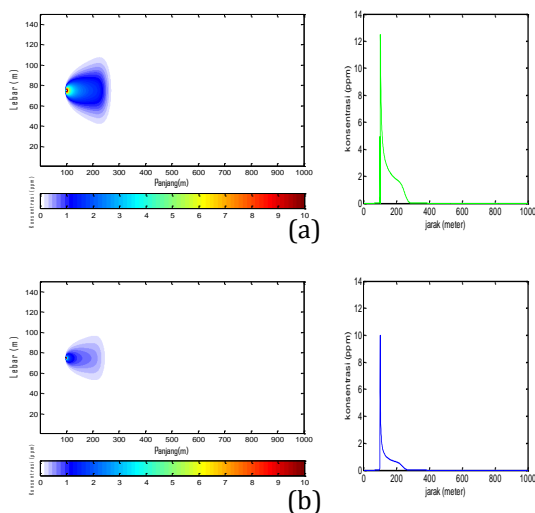
Gambar 5. Pola sebaran proses sesaat untuk  $u=0,1$  m/s,  $D=0,1$  m<sup>2</sup>/s dan  $t=900$  detik dan kurva konsentrasi terhadap jarak (a) model analitik (b) model Crank-Nicholson



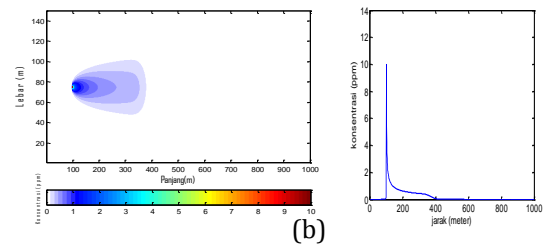
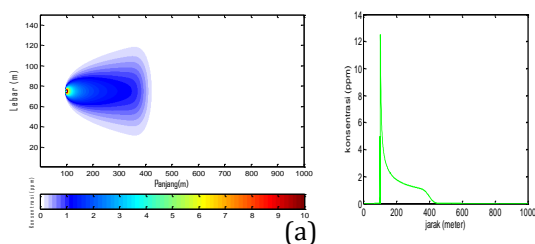


Gambar 6. Pola sebaran proses sesaat untuk  $u=0,1$  m/s,  $D=0,1$  m<sup>2</sup>/s dan  $t=1800$  detik dan kurva konsentrasi terhadap jarak (a) model analitik (b) model Crank-Nicholson

Pola sebaran untuk proses kontinu menampilkan sebaran yang memanjang karena konsentrasi yang keluar secara terus menerus dari titik sumber yang diinjeksikan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 7 dan Gambar 8 untuk waktu yang berbeda.

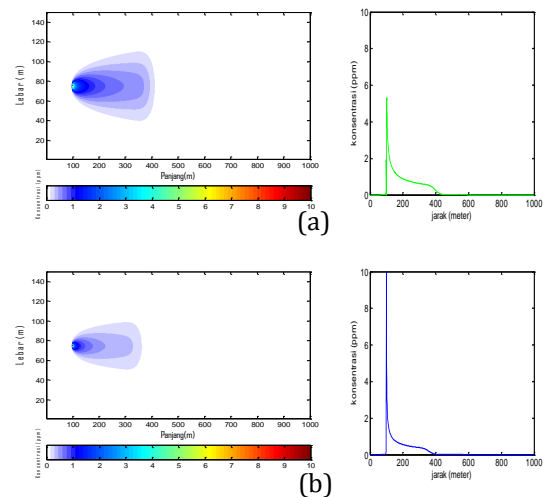


Gambar 7. Pola sebaran proses kontinu untuk  $u=0,5$  m/s,  $D=0,5$  m<sup>2</sup>/s dan  $t=300$  detik dan kurva konsentrasi terhadap jarak (a) model analitik (b) model Crank-Nicholson

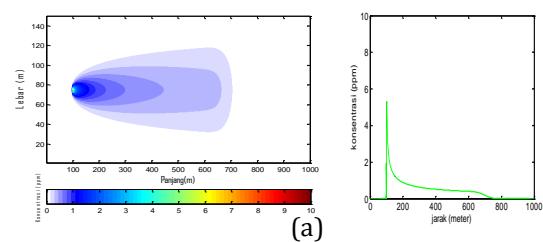


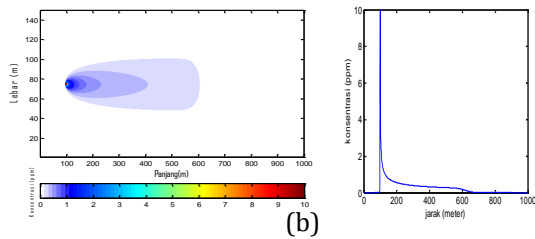
Gambar 8. Pola sebaran proses kontinu untuk  $u=0,5$  m/s,  $D=0,5$  m<sup>2</sup>/s dan  $t=600$  detik dan kurva konsentrasi terhadap jarak (a) model analitik (b) model Crank-Nicholson

Gambar 9 memperlihatkan pola sebaran yang semakin melebar dan memanjang karena dipengaruhi oleh nilai kecepatan dan difusivitas yang besar, sehingga untuk waktu yang lebih lama akan menyebabkan sebaran yang semakin memanjang dan melebar dari titik sumber yang diinjeksikan seperti pada Gambar 10.



Gambar 9. Pola sebaran proses kontinu untuk  $u=1$  m/s,  $D=1$  m<sup>2</sup>/s dan  $t=300$  detik dan kurva konsentrasi terhadap jarak (a) model analitik (b) model Crank-Nicholson





Gambar 10. Pola sebaran proses kontinu untuk  $u=1$  m/s,  $D=1$  m<sup>2</sup>/s dan  $t=600$  detik dan kurva konsentrasi terhadap jarak (a) model analitik (b) model Crank-Nicholson

Hasil dari pola sebaran dengan model Crank-Nicholson yang telah ditampilkan memiliki RMSE untuk masing-masing kasus dengan nilai yang divariasikan seperti pada tabel berikut ini.

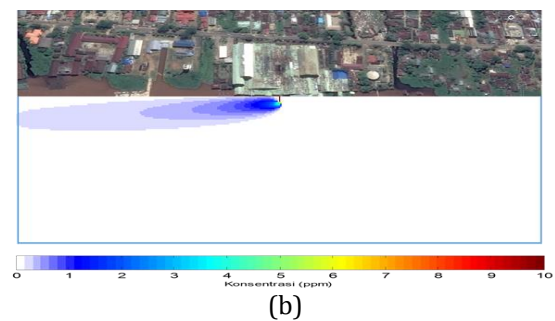
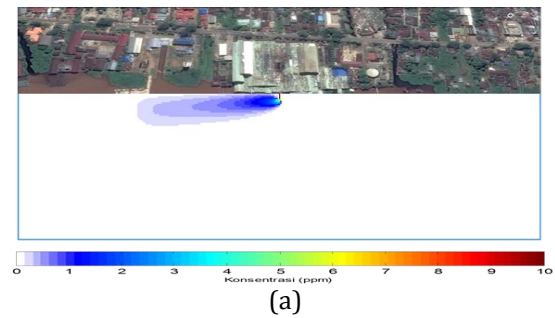
**Tabel 1.** RMSE kasus Adveksi-difusi 2D sesaat

No	Waktu	Kecepatan	Koefisien Difusi	RMSE
1	900	0,5	0,05	$1,04 \times 10^{-3}$
2	1800	0,5	0,05	$1,04 \times 10^{-3}$
3	900	1	0,1	$1,16 \times 10^{-3}$
4	1800	1	0,1	$8,19 \times 10^{-4}$

**Tabel 2.** RMSE kasus Adveksi-difusi 2D kontinu

No	Waktu	Kecepatan	Koefisien Difusi	RMSE
1	300	0,5	0,5	0,22
2	600	0,5	0,5	0,27
3	300	1	1	0,093
4	600	1	1	0,11

Pada Tabel 1 menunjukkan RMSE untuk kasus adveksi-difusi 2D proses sesaat dengan nilai RMSE yang sangat kecil baik untuk waktu yang relatif lebih cepat maupun waktu yang lebih lama. Hal ini menunjukkan bahwa kesalahan dari metode Crank-Nicholson sangat kecil jika dibandingkan dengan metode analitiknya, sehingga metode ini sangat baik digunakan untuk menyelesaikan persamaan adveksi-difusi 2D serta menentukan pola sebaran untuk kasus adveksi-difusi untuk proses sesaat. Kemudian untuk proses kontinu sebagaimana yang ditunjukkan pada Tabel 2, juga memiliki RMSE yang relatif kecil baik untuk waktu simulasi yang kecil maupun dengan waktu yang lebih besar. Akan tetapi untuk waktu simulasi yang lebih besar, nilai RMSE juga meningkat baik untuk nilai kecepatan dan koefisien difusi yang kecil ataupun yang relatif lebih besar. Hal ini terjadi karena pada kasus adveksi-difusi 2D proses kontinu konsentrasi yang keluar dari titik sumbernya secara terus-menerus sehingga adanya sedikit perbedaan antara metode yang digunakan.

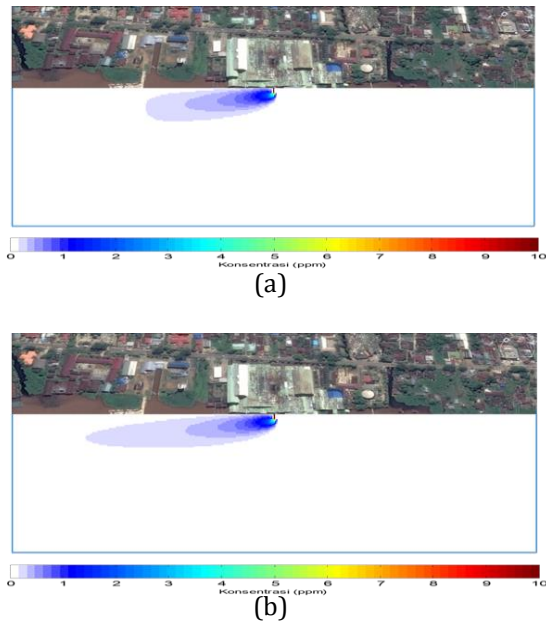


Gambar 12. Pola sebaran Metode Crank-Nicholson pada Sungai Kapuas untuk nilai  $D=2$  m<sup>2</sup>/detik saat pasang (a) 1 jam (b) 2 jam

Penerapan Metode Crank-Nicholson pada Sungai Kapuas telah menunjukkan hasil yang sesuai dengan fenomena tranpor polutan yang terjadi di alam, karena pola sebaran konsentrasi yang diinjeksikan menyebar seiring bertambahnya waktu. Begitu juga dengan nilai konsentrasinya yang semakin berkurang ketika



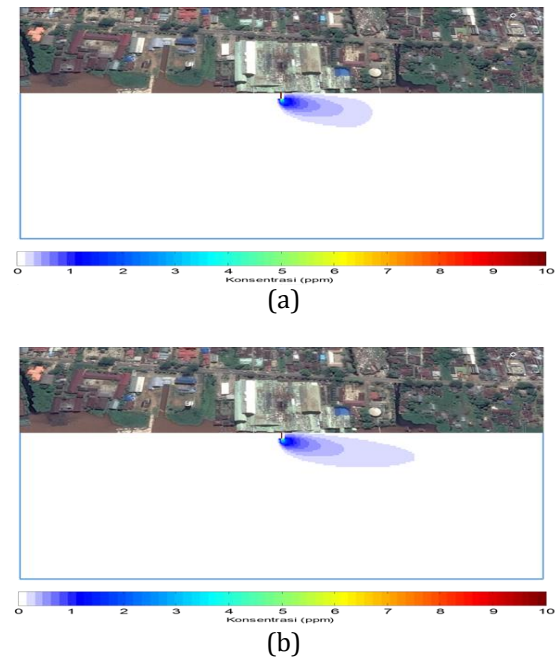
jauh dari sumber. Parameter yang digunakan dari Sungai Kapuas hanya kecepatan aliran air Sungai Kapuas saat menuju pasang dan surut.



Gambar 13. Pola sebaran Metode Crank-Nicholson pada Sungai Kapuas untuk nilai  $D=3,5 \text{ m}^2/\text{detik}$  saat surut (a) 1 jam (b) 2 jam

Pola sebaran konsentrasi di Sungai Kapuas saat menuju pasang dan surut dapat dilihat pada Gambar 11 dan Gambar 12 untuk nilai difusivitas yang kecil. Pada gambar-gambar tersebut diterapkan variasi waktu yaitu dengan waktu 1 jam dan 2 jam. Pola sebaran konsentrasi dengan waktu yang lebih lama akan semakin panjang dan jauh dari titik sumber yang diinjeksikan.

Pada Gambar 13 merupakan sebaran konsentrasi dengan nilai koefisien difusi yang lebih besar untuk arus saat surut dan pada Gambar 14 merupakan arus saat pasang. Dari gambar tersebut menunjukkan hasil yang sama dengan kasus untuk nilai koefisien difusi yang kecil, bedanya hanya terdapat pada lebar dan panjang sebaran konsentrasinya. Untuk kasus dengan nilai koefisien difusi yang besar sebarannya semakin melebar dan tidak begitu memanjang karena dipengaruhi oleh nilai difusivitasnya sehingga sedikit menghambat sebaran untuk lebih memanjang dari titik sumber. Selain itu untuk sebaran pada arus saat pasang juga selalu lebih pendek dibandingkan dengan arus saat surut, hal ini dikarenakan nilai arus saat pasang yang digunakan dari data yang didapat lebih kecil dari arus saat surut.



Gambar 14. Pola sebaran Metode Crank-Nicholson pada Sungai Kapuas untuk nilai  $D=3,5 \text{ m}^2/\text{detik}$  saat pasang (a) 1 jam (b) 2 jam

#### 4. Kesimpulan

Penerapan Metode Crank-Nicholson pada kasus adveksi-difusi 2D untuk proses sesaat dan kontinu dengan variasi nilai kecepatan dan koefisien difusi untuk waktu simulasi yang kecil maupun yang relatif lebih besar menunjukkan hasil yang baik. Hal ini ditunjukkan oleh RMSE yang didapat relatif kecil. Berdasarkan hasil simulasi dapat disimpulkan bahwa metode Crank-Nicholson sangat baik digunakan untuk menyelesaikan persamaan adveksi-difusi dua dimensi.

#### Daftar Pustaka

- [1] Ribal. Metode Beda Hingga Makasar, Draft Lecture Note on Finite Difference Methods: Universitas Hassanuddin; 2008.
- [2] Alman, Kusuma J, Khaeruddin, Aris N, Toaha S. Suatu Tinjauan Numerik Persamaan Adveksi Difusi 2-D Transfer Polutan dengan Menggunakan Metode Beda Hingga Dufort Frankel. KNM XVII. Surabaya; 2014.
- [3] Aminuddin. Solusi Analitik Persamaan Transpor Adveksi-Difusi 1D dan 2D Horizontal Menggunakan Teknik Transformasi Fourier Untuk Pemodelan Dispersi Polutan Di Suatu Perairan Bandung: Institut Teknologi Bandung; 1999.
- [4] Google earth V 7.1.5.1557. (04 April 2015). Sungai Kapuas, Kalimantan Barat.  $0^{\circ}01'10.73'' \text{ S}$ ,  $109^{\circ}20'30.96'' \text{ T}$ , Ketinggian

- Mata 3340 meter. CNES/Atrium 2015.  
<http://www.earth.google.com> [2 November 2015].
- [5] Fadugba SE, Zelibe SC, Edogbanya OH. Crank Nicolson Method for Solving Parabolic Partial Differential Equations. IJA2M. 2013; **1**(3): p. 8-23.
- [6] Chai T, Draxler RR. Root Mean Square Error (RMSE) or Man Absolute Error (MAE). Geoscientific Model Development. 2014;(7): p. 1247-1250.